www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

ECOLE NATIONALE DE L'AVIATION CIVILE

CONCOURS DE RECRUTEMENT
D'ELEVES-PILOTES DE TRANSPORT (EPT-S)
(Mathématiques supérieures)

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures

Coefficient : 7

Session 1990

Les candidats doivent traiter deux problèmes et deux seulement. Ils indiqueront, en tête de leur copie, les numéros des problèmes qu'ils ont choisi de traiter, et qui seront les seuls à être corrigés.

Pour traiter une question, le candidat peut admettre les résultats des questions précédentes.

Il est demandé aux candidats d'indiquer clairement le numéro de chaque question traitée.

PROBLEME 1 (Analyse)

Dans ce problème, le corps de base est celui des nombres réels. n désigne partout un élément de $\mathbb{N}^*$. On pose :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^3+1)^n} .$$

1.1. Etablir la convergence de cette intégrale.

1.2. A l'aide d'une intégration par parties, former une relation de récurrence liant I_n et I_{n+1} .

1.3. Calculer I_1 et vérifier que le résultat s'exprime simplement à l'aide de π et de $\sqrt{3}$. On ne demande pas de calcul décimal approché de I_1 . En déduire, lorsque $n \geqslant 2$, une expression de I_n sous forme d'un produit.

1.4. On note ε un réel de $]\,0\,,\,2\,[$ et on considère l'égalité :

$$I_n = J_n(\varepsilon) + K_n(\varepsilon) + L_n \text{ , où l'on a posé :}$$

$$J_n(\varepsilon) = \int_0^{\frac{\varepsilon}{2}} \frac{dx}{(x^3+1)^n} , \quad K_n(\varepsilon) = \int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{1} \frac{dx}{(x^3+1)^n} , \quad L_n = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x^3+1)^n} .$$

a) A l'aide d'une majoration simple de L_n , que l'on établira, déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} L_n$.

b) Montrer que :

$$0 \leqslant J_n(\varepsilon) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} , \qquad 0 \leqslant K_n(\varepsilon) \leqslant \frac{1-\frac{\varepsilon}{2}}{\left(1+\frac{\varepsilon^3}{8}\right)^n} .$$

c) A l'aide de ce qui précède, déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{dx}{(x^3+1)^n}$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

1.5. Soit x un réel de $]\,-\infty\,,\,1\,[$. On pose :

$u(x) = x + \ell n\,(1-x)$, où ℓn désigne le logarithme népérien.

a) Etudier les variations de u sur $]\,-\infty\,,\,1\,[$. En déduire l'inégalité valable si $x < 1$: $\ell n\,(1-x) \leqslant -x$.

T.S.V.P

b) En reprenant l'expression de I_n sous forme de produit obtenue en 1.3., quelle majoration de $\ell n\ I_n$ peut-on en déduire ?

c) On pose : $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrer que, pour tout n élément de $\mathbb{N}^*$:

$$\ell n\ (n+1) \leqslant S_n \leqslant 1 + \ell n\ n.$$

On pourra pour cela s'aider du dessin de la courbe d'équation $y = \frac{1}{x}$.

En déduire $\lim_{n\to+\infty} S_n$.

d) A l'aide de ce qui précède, retrouver $\lim_{n\to\infty} I_n$.

1.6. On pose, pour tout n élément de $\mathbb{N}^*$:

$$a_n = \sqrt[3]{n}\ I_n, \qquad b_n = \ell n\ a_n, \qquad t_n = b_{n+1} - b_n .$$

a) Déterminer le développement limité de t_n , à l'ordre 2 inclus, selon les puissances de $\frac{1}{n}$, lorsque $n \to +\infty$.

b) Montrer l'existence d'un élément n_0 de $\mathbb{N}^*$ tel que, pour tout n vérifiant $n \geqslant n_0$, on ait l'inégalité stricte : $-\frac{1}{3}\ \frac{1}{n^2} < t_n < 0$.

Que peut-on en déduire au sujet du sens de variation de la suite (b_n) lorsque $n \geqslant n_0$?

c) Montrer à l'aide de 1.6. b) que la suite (b_n) est minorée. On commencera par vérifier que, pour tout entier n tel que $n \geqslant 2$:

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} .$$

d) Que peut-on en déduire pour la suite (b_n) ?

e) Montrer l'existence d'un réel ℓ , strictement positif, que l'on ne tentera pas de calculer, tel que : $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell$.

En déduire l'existence d'un élément de $\mathbb{N}^*$, noté n_1 , tel que, pour tout entier n vérifiant $n \geqslant n_1$, on ait l'inégalité : $a_n > \frac{\ell}{2}$.

En déduire une minoration de I_n , pour $n \geqslant n_1$.

1.7. a) Montrer que, pour tout n élément de $\mathbb{N}^*$,

$$\int_n^{n+1} x^{-\frac{1}{3}}\,dx \leqslant 3\frac{1}{\sqrt[3]{n}} \leqslant \int_{n-1}^{n} x^{-\frac{1}{3}}\,dx .$$

b) En déduire $\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3\sqrt[3]{k}} \right)$.

c) A l'aide des questions 1.6. e) et 1.7. b), déterminer $\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} I_k \right)$.

T. S. V. P.

PROBLEME 2 (Algèbre)

Dans tout ce problème, le corps de base est celui des nombres complexes. Toutefois, la plupart des matrices introduites sont à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

Toutes les matrices considérées sont à deux lignes et deux colonnes.

On rappelle que la matrice unité est alors $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

On appelle, dans tout ce qui suit, matrice cyclique une matrice (2 x 2), à coefficients entiers relatifs, notée A, telle qu'il existe k, élément de $\mathbb{N}^*$, vérifiant : $A^k = I$.

E désigne l'ensemble des matrices cycliques (non vide, car il contient manifestement I).

Une matrice A, élément de E, s'écrira $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$, où $(a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4$.

On notera respectivement :

- E_d la partie de E formée des matrices cycliques admettant une valeur propre double ;
- E_s la partie de E formée des matrices cycliques admettant deux valeurs propres réelles et distinctes ;
- E_r la partie de E formée des matrices cycliques n'admettant pas de valeur propre réelle.

2.1. Soit A une matrice cyclique. $U(A)$ est l'ensemble des éléments h de $\mathbb{N}^*$ tels que $A^h = I$.

Montrer que $U(A)$ est l'ensemble des multiples d'un entier strictement positif noté $h_o(A)$.

2.2. Soit $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ une matrice cyclique.

a) λ étant une valeur propre (réelle ou non) de A, calculer $|\lambda|$.

b) En déduire que $(a + d)$ ne peut prendre que cinq valeurs au plus, que l'on écrira.

c) Quelles sont les valeurs possibles de $(ad - bc)$?

2.3. $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ désigne dans cette question une matrice de E_d, dont la valeur propre double est notée λ.

a) Quelles sont les valeurs possibles de λ ?

b) On suppose $\lambda = 1$.

Montrer qu'il existe une matrice inversible P, à coefficients réels, dont l'inverse est notée P^{-1}, et un réel t, tels que : $A = P\,T\,P^{-1}$,

où $T = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ Calculer T^h, où h est un élément de $\mathbb{N}^*$.

T.S.V.P.

Si $t \neq 0$, peut-on avoir $T^h = 1$?

En déduire la matrice A . Quelle est la valeur de $h_o(A)$?

c) A l'aide de 2.3. a) et de 2.3. b), déterminer tous les éléments de E_d , et les valeurs de $h_o(A)$ associées.

2.4. $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ désigne dans cette question un élément de E_s , supposé non vide.

a) Quelles sont les valeurs propres de A ? En déduire que $a + d = 0$ et que $ad - bc = -1$.

b) Montrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

c) Quelle est la valeur de $h_o(A)$?

d) Montrer que, réciproquement, toute matrice (2 x 2) à coefficients dans $\mathbb{Z}$ vérifiant $a + d = 0$ et $ad - bc = -1$ est élément de E_s . Exprimer, pour une matrice de E_s , bc en fonction de a seul.

e) A quelle condition, portant sur a , peut-on avoir $b = 0$ ou $c = 0$?

f) Ecrire explicitement un élément de E_s tel que $b = 0$, $c \neq 0$; un élément de E_s tel que $b \neq 0$, $c = 0$, et un élément de E_s tel que $a = 2$.

2.5. $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ désigne dans cette question un élément de E_r , supposé non vide.

Montrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

Quelle est la valeur de $(ad - bc)$?

Montrer qu'on a nécessairement $a + d = 1$, ou $a + d = 0$, ou $a + d = -1$.

Les parties correspondantes de E_r seront notées respectivement $E_{r,1}$, $E_{r,0}$ et $E_{r,-1}$.

2.6. A désigne dans cette question un élément de $E_{r,1}$ (supposé non vide).

a) Calculer bc en fonction de a seul. Peut-on avoir $b = 0$ ou $c = 0$?

b) Montrer que, réciproquement, toute matrice (2 x 2) à coefficients dans $\mathbb{Z}$ vérifiant $d = 1 - a$ et $bc = -a^2 + a - 1$ est élément de $E_{r,1}$.

c) Quelle est la valeur de $h_o(A)$ pour une matrice A de $E_{r,1}$?

d) Ecrire explicitement un élément de $E_{r,1}$ tel que $a = 2$.

T.S.V.P.

2.7. A désigne dans cette question un élément de $E_{r,0}$ (supposé non vide).

a) Calculer bc en fonction de a seul. Peut-on avoir $b = 0$ ou $c = 0$?

b) Montrer que, réciproquement, toute matrice (2 x 2) à coefficients dans $\mathbb{Z}$ vérifiant $d = -a$ et $bc = -a^2 - 1$ est élément de $E_{r,0}$.

c) Quelle est la valeur de $h_o(A)$ pour une matrice A de $E_{r,0}$?

d) Ecrire explicitement un élément de $E_{r,0}$ tel que $a = 2$.

2.8. A désigne dans cette question un élément de $E_{r,-1}$ (supposé non vide).

a) Calculer bc en fonction de a seul. Peut-on avoir $b = 0$ ou $c = 0$?

b) Montrer que, réciproquement, toute matrice (2 x 2) à coefficients dans $\mathbb{Z}$ vérifiant $d = -1 - a$ et $bc = -a^2 - a - 1$ est élément de $E_{r,-1}$.

c) Quelle est la valeur de $h_o(A)$ pour une matrice A de $E_{r,-1}$?

d) Ecrire explicitement un élément de $E_{r,-1}$ tel que $a = 2$.

2.9. Déterminer le plus petit commun multiple de tous les entiers $h_o(A)$ associés à toutes les matrices de E.

PROBLEME 3 (Géométrie)

Dans tout ce problème, le corps de base est celui des nombres réels. Le plan euclidien de la géométrie usuelle est rapporté à un repère orthonormé $(O , \vec{i} , \vec{j})$ d'axes Ox , Oy . a et b sont deux réels tels que $0 < b < a$.

(E) désigne, dans les questions 3.1. à 3.4 incluses, l'ellipse ensemble des points $M(t)$ de coordonnées $(a \cos t , b \sin t)$, où $t \in [0 , 2\pi [$.

(H) désigne dans les questions 3.5. à 3.7. incluses, la branche d'hyperbole ensemble des points $M_1(t)$ de coordonnées $(a \operatorname{ch} t , b \operatorname{sh} t)$, où $t \in \mathbb{R}$.

On rappelle que la développée d'une courbe plane est l'ensemble des centres de courbure de cette courbe.

3.1. Soit $C(t)$ le centre de courbure de (E) associé à $M(t)$. Calculer les coordonnées $[u(t) , v(t)]$ de $C(t)$. Montrer que :

$u(t)$ s'exprime très simplement en fonction de a, $(a^2 - b^2)$ et $\cos t$;

$v(t)$ s'exprime très simplement en fonction de b, $(a^2 - b^2)$ et $\sin t$.

3.2. On désigne par (Γ) la développée de (E) ; (Γ_0) est l'arc de (Γ) correspondant à $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Construire (Γ_0) ; on précisera le sens de concavité et les tangentes aux extrémités de (Γ_0) .

Du dessin de (Γ_0) , déduire le dessin de (Γ) à l'aide de deux symétries.

3.3. (Γ) est une courbe fermée ; calculer en fonction de a et b l'aire S intérieure à (Γ) , qu'on exprimera à l'aide de a , b et de π

3.4. Calculer en fonction de a et b la longueur de (Γ_0) ; en déduire la longueur L de (Γ) .

3.5. Soit $C_1(t)$ le centre de courbure de (H) associé à $M_1(t)$. Calculer les coordonnées $[u_1(t) , v_1(t)]$ de $C_1(t)$. On simplifiera s'il y a lieu les expressions de $u_1(t)$ et de $v_1(t)$ en s'inspirant de 3.1.

3.6. On désigne par (γ) la développée de (H) . (γ_0) est la branche de (γ) correspondant à $t \geqslant 0$.

Construire (γ_0) ; on précisera le sens de concavité et la tangente au point $t = 0$.

Du dessin de (γ_0) , déduire le dessin de (γ) à l'aide d'une symétrie.

3.7. Calculer en fonction de a et b la longueur ℓ_1 de l'arc de (γ_0) correspondant à $0 \leqslant t \leqslant 1$. Le résultat fera intervenir $\operatorname{ch} 1$ et $\operatorname{sh} 1$, dont aucun calcul décimal approché n'est demandé.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail